Početní část 2 - 25.1.2021

3. Integrand je spojitý na intervalech $I_k = (-\pi, \pi) + 2k\pi$, kde budeme hledat primitivní funkci. Integrál lze upravit pomocí známé goniometrické identity na

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|} = (-1)^k \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \left|\begin{matrix} \text{sub.} \\ t = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x \end{matrix}\right| =$$

$$= (-1)^k \int \frac{\sqrt{2}\mathrm{d}t}{1-t^2} = (-1)^k \sqrt{2}\ \operatorname{argtanh} t + C =$$

$$= (-1)^k \sqrt{2}\ \operatorname{argtanh}\left[\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right] + C \qquad (\text{na } I_k).$$

Výsledek nelze lepit.

4. Platí

$$a^x = e^{x\log a} = 1 + \log(a)x + \frac{\log^2 a}{2}x^2 + \frac{\log^3 a}{6}x^3 + \frac{\log^4 a}{24}x^4 + \frac{\log^5 a}{120}x^5 + o(x^5),$$

$x \to 0$.

Standardními postupy dále (výpočtem přímo z definice, dělením Taylorových polynomů) zjistíme, že

$$f(x) = -\frac{1}{2}\log(a)x + \frac{1}{24}\log^3(a)x^3 + o\left(x^3\right), \quad x \to 0.$$

Odtud plyne, že pro $g(x) = \dfrac{1-e^x}{1+e^x} + \dfrac{x}{2}$ platí

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2} = 0$$

Dosadíme-li nyní

$$x_n = \frac{\log n}{n}$$

(což je posloupnost jdoucí do 0 pro $n \to \infty$), dostaneme (za použití Heineho věty), že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\log^2 n}\left(\frac{1-\sqrt[n]{n}}{1+\sqrt[n]{n}} + \frac{\log n}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\log^2 n}\left(\frac{1-e^{\frac{\log n}{n}}}{1+e^{\frac{\log n}{n}}} + \frac{\log n}{2n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{g(x_n)}{x_n^2} = 0.$$